

التمرين الأول :

لدينا دائرة كهربائية مكونة من العناصر الكهربائية التالية :

- مولد للتوتر الثابت قوته الكهربائية المحركة E - ناقل أومي مقاومته $R = 100\Omega$
- قاطعة K وشيعة مثالية وذاتيتها L

1- في اللحظة $t = 0$ نغلق القاطعة K

أ- بتطبيق قانون جمع التوترات بين أن : $\frac{du_R}{dt} + \frac{R}{L}u_R = \frac{ER}{L}$

ب- أثبت أن $u_R = RI_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ هو حل للمعادلة التفاضلية

ج- بين أن التوتر بين طرفي الشيعة يُكتب بالعلاقة التالية : $u_b(t) = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

د- أثبت أن : $\frac{du_R}{dt} = \frac{1}{\tau}u_B$

2- وبواسطة تقنية خاصة تمكنا من رسم البيان $\frac{du_R}{dt} = f(u_B)$

- أوجد بيانيا قيمة τ - قيمة E

- نفتح القاطعة K

1- أكتب المعادلة التفاضلية للتيار المارة في الدائرة

- ثم بين أن هو $i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ حل للمعادلة التفاضلية

أ- بين أن $E_L(t) = E_{L \max} e^{-\frac{2t}{\tau}}$

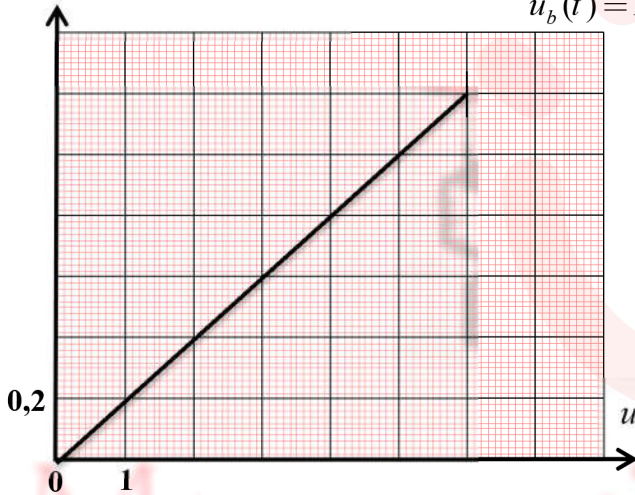
ب- أعط عبارة $-\frac{dE_L}{dt}$ بدلالة $E_{L \max}, t, \tau$

3- وبواسطة تقنية خاصة تمكنا من رسم البيان $-\frac{dE_L}{dt} = f(t)$

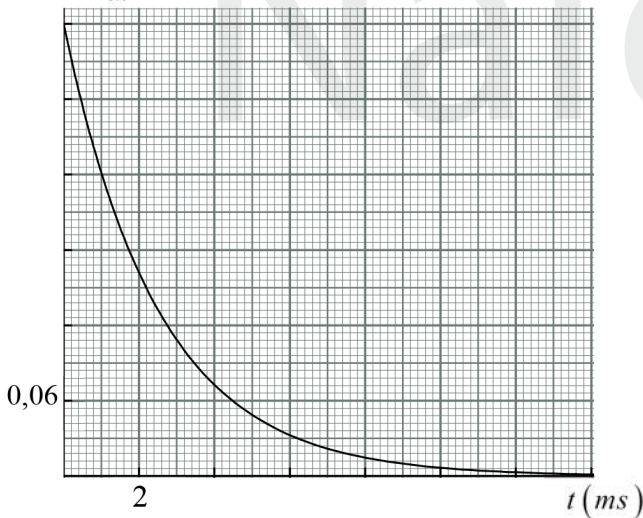
ب- أوجد بيانيا قيمة $E_{L \max}$ ثم أوجد شدة التيار العظمى I_0

ج- إستنتج قيمة ذاتية الشيعة L

$$\frac{du_R}{dt} \left(\frac{V}{ms} \right)$$



$$-\frac{dE_L}{dt} (J.s^{-1})$$



التصحيح

$$1-أ- \text{بيان أن: } \frac{du_R}{dt} + \frac{R}{L}u_R = \frac{ER}{L}$$

حسب قانون جمع التوترات $u_B(t) + u_R(t) = E$

$$L \frac{di(t)}{dt} + u_R(t) = E \Rightarrow \frac{L}{R} \frac{du_R(t)}{dt} + u_R(t) = E$$

$$\frac{du_R(t)}{dt} + \frac{R}{L}u_R(t) = \frac{ER}{L} \quad \text{بالضرب في } \frac{R}{L}$$

-إثبات أن $u_R = RI_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ هو حل للمعادلة التفاضلية

$$\frac{du_R(t)}{dt} = \frac{RI_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{RI_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R}{L}RI_0 - \frac{R}{L}RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{ER}{L} \Rightarrow \frac{R}{L}E - \frac{ER}{L} = 0$$

ومنه $u_R = RI_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ هو حل للمعادلة التفاضلية

ج-بيان أن التوتر بين طرفي الوشعة يكتب بالعلاقة التالية: $u_B(t) = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$
الطريقة الأولى:

$$u_B(t) + u_R(t) = E \Rightarrow u_B(t) = E - u_R(t) = E - RI_0 + RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow u_B(t) = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{لدينا}$$

$$RI_0 = R \frac{E}{E} \Rightarrow RI_0 = E \quad \text{لأن}$$

$$u_B = L \frac{di(t)}{dt} = \frac{L}{R} \frac{du_R}{dt} = \frac{L}{R} \frac{RI_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow u_B(t) = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{الطريقة الثانية:}$$

$$د-إثبات أن: $\frac{du_R}{dt} = \frac{1}{\tau}u_B$$$

الطريقة الأولى:

$$u_R = RI_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow \frac{du_R}{dt} = \frac{RI_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{du_R}{dt} = \frac{1}{\tau}u_B$$

الطريقة الثانية:

$$\frac{du_R(t)}{dt} + \frac{R}{L}u_R(t) = \frac{ER}{L} \Rightarrow \frac{du_R(t)}{dt} = \frac{ER}{L} - \frac{R}{L}u_R(t) \Rightarrow \frac{du_R(t)}{dt} = \frac{ER}{L} - \frac{R}{L} \left(RI_0 - RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$\frac{du_R(t)}{dt} = \frac{ER}{L} - \frac{RRI_0}{L} + \frac{RRI_0}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{du_R}{dt} = \frac{1}{\tau}u_B$$

الطريقة الثالثة:

$$u_B = L \frac{di(t)}{dt} = \frac{L}{R} \frac{du_R}{dt} \Rightarrow \frac{du_R}{dt} = \frac{R}{L}u_B \Rightarrow \frac{du_R}{dt} = \frac{1}{\tau}u_B$$

-2

-إيجاد بياناً قيمة τ

المعادلة الرياضية للبيان: $\frac{du_R}{dt} = 0,2u_B$ وبالمطابقة بين العلاقة البيانية والعلاقة النظرية نجد: $\tau = 5 \text{ ms}$

-إيجاد قيمة E

$$u_{B \text{ max}} = E \Rightarrow E = 6V$$



-نفتح القاطعة K

1- كتابة المعادلة التفاضلية للتيار المارة في الدارة

$$u_L(t) + u_R(t) = 0 \Rightarrow L \frac{di(t)}{dt} + u_R(t) = 0 \Rightarrow L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0 \quad \text{حسب قانون جمع التوترات}$$

$$\frac{di(t)}{dt} + \left(\frac{R}{L}\right)i(t) = 0 : \quad \text{بالقسمة على } L \text{ نجد}$$

-بيان أن هو $i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ حل للمعادلة التفاضلية

$$\frac{di(t)}{dt} + \left(\frac{R}{L}\right)i(t) = 0$$

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{R}{L} \times \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} = -\frac{E}{L} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$-\frac{E}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R}{L} \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

أ- بيان أن $E_L(t) = E_{L \max} e^{-\frac{2t}{\tau}}$

$$E_L(t) = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} LI_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} \Rightarrow E_L(t) = E_{L \max} e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

ب- عبارة $-\frac{dE_L}{dt}$ بدلالة $E_{L \max}, t, \tau$

$$\frac{dE_L}{dt} = -\frac{2E_{L \max}}{\tau} e^{-\frac{2t}{\tau}} \Rightarrow -\frac{dE_L}{dt} = \frac{2E_{L \max}}{\tau} e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

ب- إيجاد بيانيا قيمة $E_{L \max}$

$$\left(-\frac{dE_L}{dt}\right)_{t=0} = \frac{2E_{L \max}}{\tau} = 0,36 \Rightarrow E_{L \max} = \frac{0,005 \times 0,36}{2} \Rightarrow E_{L \max} = 9 \times 10^{-4} J$$

- إيجاد شدة التيار العظمى I_0

$$I_0 = \frac{E}{R} = \frac{6}{100} \Rightarrow I_0 = 0,06 A$$

ج- إستنتاج قيمة ذاتية الوشيعة L

$$\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow L = \tau \times R \Rightarrow L = 0,5 H$$

ملاحظة :

يمكن إيجاد قيمة τ من البيان الثاني حيث المماس عند اللحظة $t = 0$ يقطع محور الفواصل في $t = \frac{\tau}{2} = 2,5 \Rightarrow \tau = 5ms$